ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ГЕОДЕЗИИ*

Ю.М. Нейман (МИИГАиК)

В 1959 г. окончил геодезический факультет МИИГАиК по специальности «инженер-геодезист». С 1968 г. работает в МИИГАиК, в настоящее время — профессор кафедры высшей математики Московского государственного университета геодезии и картографии. Одновременно работает в ППК «Роскадастр». Доктор технических наук, профессор.

Л.С. Сугаипова (МИИГАиК)

В 1993 г. окончила факультет математики, информатики и вычислительной техники Чечено-Ингушского государственного педагогического института по специальности «учитель математики, информатики и ВТ». С 2002 г. работает в Московском государственном университете геодезии и картографии (МИИГАиК), в настоящее время — профессор кафедры высшей математики. Одновременно работает в ППК «Роскадастр». Доктор технических наук, доцент.

Общие сведения об искусственных нейронных сетях

Искусственная нейронная сеть (ИНС) — это новое направление в вычислительной математике и практике создания сложных технических систем, способное выполнять самые разнообразные операции, в том числе недоступные для традиционной математики (сравнения по образцу, классификация объектов, распознавание образов и др.). Область использования ИНС в настоящее время чрезвычайно широка — от диагностики заболеваний и автоматического анализа документов до управления динамическими системами и создания систем на основе искусственного интеллекта.

Поэтому естественно желание выяснить возможности нового мощного математического метода и при решении задач геодезического профиля. Разумеется, задачи геодезического профиля — это тоже достаточно широкий класс, но, пожалуй, наибольший интерес представляют разного рода задачи аппроксимации.

Постановку широкого класса задач, связанных с аппроксимацией, можно сформулировать следующим образом.

Дано два множества векторов: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (не обязательно одной и той же размерности) и предполагается, что между соответствующими элементами этих множеств существует некоторая функциональная зависимость Φ такая, что

$$\Phi(x_i) = y_i + e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь e_i — случайные независимые векторы-ошибки с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей $\sigma^2 E$.

Требуется определить функцию Φ так, чтобы $M(e) = 0$, $\sigma^2 < c$, где M обозначает математическое ожидание, E — единичную матрицу, σ^2 — дисперсию ошибок, а c — заданный предел требуемой точности аппроксимации.

Искомая функция Φ может иметь очень сложную структуру, и зачастую подобные задачи оказываются «под силу» только искусственным нейронным сетям, построенным в какой-то мере по аналогии с мозговой деятельностью и способным обучаться.

С математической точки зрения, ИНС представляет систему соединенных и взаимодействующих между собой довольно простых процессоров, которые

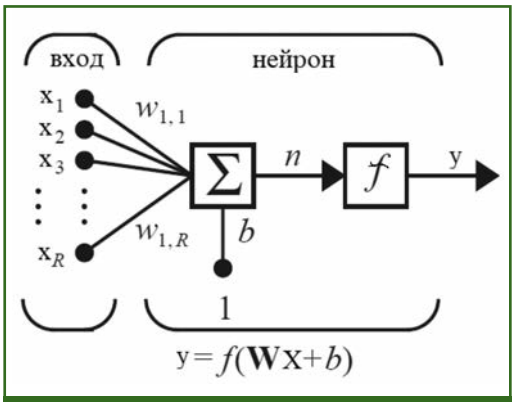

Рис. 1
Схема искусственного нейрона как простейшего процессора [1]

* Работа выполнена в рамках федерального проекта «Поддержание, развитие и использование системы ГЛОНАСС» государственной программы Российской Федерации «Космическая деятельность России» на 2021–2030 гг., ЕГИСУ № 1210806000081-5.

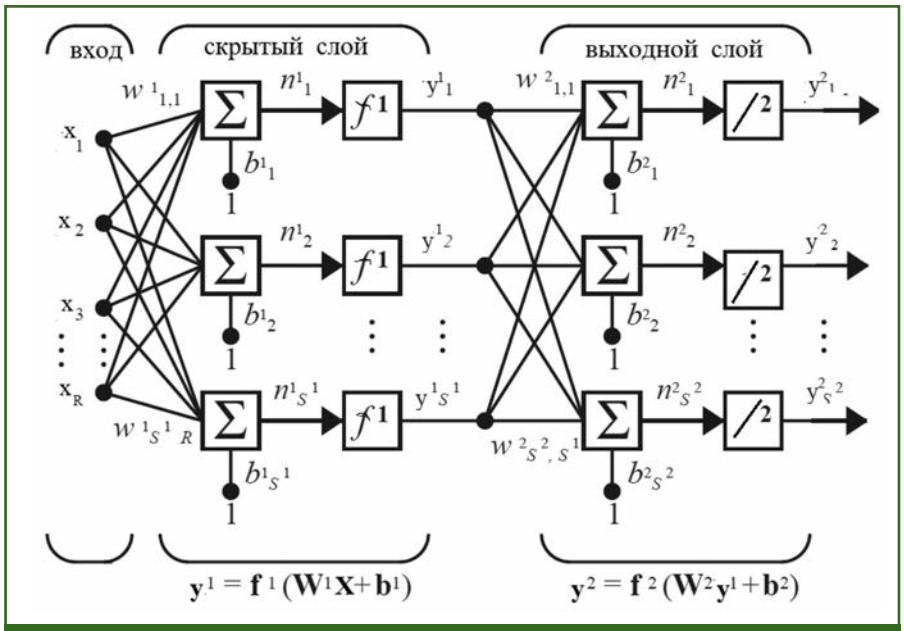

Рис. 2
Персептрон прямого распространения [1]

называют искусственными нейронами. Искусственный нейрон имитирует в первом приближении свойства биологического нейрона. Хотя сетевые парадигмы весьма разнообразны, в основе почти всех их лежит конфигурация, показанная на рис. 1.

На вход искусственного нейрона поступает некоторое множество сигналов, обозначенных $x_1, x_2, \ldots, x_R$. Каждый такой вход умножается на некоторый вес w_{1i}, имитирующий синаптическую силу биологического нейрона, и поступает на суммирующий блок Σ. Другим входом постоянно служит 1, которая умножается на определенную константу b. Суммирующий блок, соответствующий телу биологического элемента, алгебраически складывает взвешенные входы и добавляет произведение 1b = w_{01}, т. е.

$$\sum_{i=1}^{R} w_{1i}x_i + w_{10} = n$$

Здесь w_{1i} обозначает вес, соответствующий каждому входу i = 1, …, R в нейрон и определяющий активность соответствующего сигнала, w_{10} — смещение.

Далее эта сумма модифицируется с помощью какой-нибудь несложной нелинейной функции. Нелинейная функция, которая используется для преобразования уровня активации нейрона в выходной сигнал, называется передаточной (или активационной) функцией. Такая функция обеспечивает нелинейность сети и, как следствие, большую мощность. В качестве передаточной функции можно выбирать различные нелинейные дифференцируемые функции, но в задачах аппроксимации чаще других используется гиперболический тангенс.

В общем случае от передаточной функции активации нейрона требуется только нелинейность — и более ничего. Но, конечно, соответствующим образом подобранная передаточная функция существенно увеличивает эффективность нейрона.

То или иное количество нейронов в виде указанных простых процессоров объединяются и вместе с управляемым взаимодействием образуют то, что называется искусственной нейронной сетью.

Как можно составлять сети из элементов? Вообще говоря — как угодно, лишь бы входы получали какие-нибудь сигналы. Но такой произвол, конечно, слишком необозрим, поэтому используют несколько стандартных архитектур, из которых путем вырезания лишнего или добавления строят большинство используемых сетей.

Одна из наиболее распространенных базовых архитектур нейронных сетей — слоистые сети. Совокупность нейронов с едиными входными сигналами называют слоем.

Обычно выделяют (по крайней мере) три слоя сети: *входной* (исходные данные задачи), *промежуточный* (его называют скрытым, скрытых слоев может быть много) и *выходной* (результаты решения задачи). Сети, содержащие только один промежуточный слой, называют *персептронами* (рис. 2).

Здесь w_{ji} обозначает вес, соответствующий каждому i-му входу в j-ый нейрон, $b_j = w_{j0}$ — смещение j-го нейрона, верхний индекс указывает номер слоя, а s обозначает количество нейронов в каждом слое. Передаточные функции скрытого слоя — нелинейные, а передаточные функции выходного слоя — линейные.

В конечном счете, при наличии n нейронов входного слоя, одного промежуточного слоя с m нейронами и l нейронов на выходе

$$y_k = f_k\left[\sum_{j=1}^{m} w_{jk} f_j\left(\sum_{i=1}^{n} w_{ij}x_i + w_{j0}\right) + w_{k0}\right];\ k = 1, 2, \ldots, l.$$

Если промежуточных слоев несколько, то используется термин многослойный персептрон.

Такие по отдельности простые процессоры, будучи соединенными в достаточно большую сеть с управляемым взаимодействием, вместе способны решать довольно сложные задачи [2].

Дальнейший прогресс связан с глубокими нейросетями [3]. Углубленное обучение обычно реализуется в виде нейронных сетей более сложной архитектуры. Термин «глубокий» относится, главным образом, к числу слоев в нейросети: чем больше слоев, тем глубже сеть, тем больше у нее свободных параметров и, в общем случае, тем более сложную задачу такая сеть в состоянии надежно решить. Традиционные нейронные сети содержат обычно три слоя, в то время как глубокие сети могут иметь сотни слоев и десятки тысяч обучающихся параметров нейронов.

Аппроксимирующие возможности ИНС

Ранее было сказано, что ИНС позволяют решать множество различных задач, в том числе требующих очень сложных вычислений. Но из предыдущих схем видно, что нейронные сети пользуются только рациональными действиями и всевозможными суперпозициями довольно простых нелинейных функций одной переменной.

Естественно, возникает вопрос: на что можно надеяться, используя только такие операции? Можно ли произвольную непрерывную функцию многих переменных получить с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций одной переменной?

Заданный вопрос имеет очень большую историю и гораздо старше, чем исследования искусственных нейронных сетей.

Какие функции вообще доступны вычислению? Мы не будем касаться деталей этого вопроса, а сразу скажем, что ответ на него является положительным! В серии работ А.Н. Колмогоров [4], затем В.И. Арнольд [5] и вновь А.Н. Колмогоров [6] решили эту проблему, а именно: любую непрерывную функцию n переменных можно получить с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций одной переменной.

Но, может быть, не менее важным является другой вопрос: можно ли практически получить достаточно точную аппроксимацию функции многих переменных с помощью линейных операций и суперпозиций функций одной переменной? Дело в том, что нейронные сети можно трактовать как специальные формальные «устройства», осуществляющие именно такие приближения. Каждая сеть состоит из формальных нейронов, нейрон получает на вход вектор сигналов и вычисляет сначала скалярное произведение сигнала с вектором весов, а затем некоторую функцию одной переменной. Результат рассылается на входы других нейронов или передается на выход. Таким образом, нейронные сети вычисляют суперпозиции простых функций одной переменной и их линейных комбинаций.

В настоящее время известен ряд теорем [7, 8], доказывающих возможность сколь угодно точной аппроксимации непрерывных функций многих переменных нейронными сетями с использованием практически произвольной непрерывной функции одной переменной. Так, например, универсальная теорема аппроксимации, доказанная американским математиком Джорджем Цыбенко в 1989 г., утверждает, что искусственная нейронная сеть прямой связи (связи не образуют циклов) с сигмоидой в виде активационной функции и одним скрытым слоем может — при достаточном количестве нейронов в скрытом слое и соответствующем наборе параметров — аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой как угодно высокой точностью. Проще говоря, теорема Цыбенко утверждает, что нейросеть может заменить сложную непрерывную функцию более простой с любой точностью.

Итак, на главный вопрос этого раздела — что могут вычислять нейронные сети — получен многообещающий ответ: в каком-то смысле нейронные сети могут все. Но остается открытым другой важный вопрос: как их этому научить?

Коротко об обучении ИНС

Среди многих интересных свойств искусственных нейронных сетей, по-видимому, важнейшим является их способность к обучению. Тем не менее, возможности обучения ИНС, конечно, ограничены, и нужно решить множество разных задач, чтобы достичь нужной цели.

А цель обучения состоит в настройке сети, т. е. в таком подборе ее параметров (весов и смещений), при котором приложение определенного множества входов приводило бы к требуемому множеству выходов. Для краткости эти множества входов и выходов называют векторами, а процедура настройки составляет процесс обучения сети.

В настоящее время существует обширная классификация ИНС по различным принципам, и разработано множество различных алгоритмов обучения ИНС как с учителем, так и без учителя.

Обучение с учителем предполагает, что для каждого входного вектора существует целевой вектор, представляющий собой требуемый выход. Вместе они называются обучающей парой. Обычно сеть обучается на некотором достаточно большом количестве таких обучающих пар, которое называется обучающим множеством. Вопрос о том, сколько нужно иметь наблюдений для обучения сети, часто

оказывается непростым. На самом деле это число зависит от сложности того отображения, которое должна воспроизводить нейронная сеть. С ростом числа используемых признаков количество наблюдений возрастает по нелинейному закону.

Процесс обучения состоит в том, что поочередно на вход сети подается входной вектор, вычисляется выходной вектор и сравнивается с соответствующим целевым вектором. Полученное отличие определяет значение функции цели и используется далее для обратного хода, имеющего своей задачей коррекцию весов и смещений сети под условием минимизации определенной функции цели.

В качестве функции цели чаще всего берется сумма квадратов уклонений v вычисленных выходных значений от требуемых целевых. Будем обозначать функцию цели как F(X), где X обозначает множество всех весовых коэффициентов и смещений сети. Их общее количество обозначим через N. В таком случае F суть функция N переменных, а множество всех ее значений, соответствующих всевозможным сочетаниям весов и смещений, удобно трактовать как многомерную поверхность. Ее называют поверхностью функции цели. Таким образом, цель обучения нейронной сети с геометрической точки зрения состоит в том, чтобы найти для этой многомерной поверхности точку глобального минимума для всех обучающих пар.

В случае линейной модели сети и функции цели в виде суммы квадратов уклонений v такая поверхность будет представлять собой параболоид, который имеет единственный минимум и практически постоянную кривизну. Это позволяет отыскать глобальный минимум сравнительно просто (достаточно, как известно, обеспечить условие $\partial F/\partial W = 0$).

В случае нелинейной модели поверхность ошибок имеет гораздо более сложное строение и обладает рядом свойств, существенно затрудняющих поиск экстремума (наличие локальных минимумов, седловые точки и т. п.). Кривизна поверхности ошибок в разных регионах обучения может сильно различаться.

В любом случае задача решается численно, последовательными приближениями, двигаясь с тем или иным шагом от случайно выбранной точки на поверхности функции цели по направлению обратного градиента F. В процессе обучения веса и смещения сети постепенно становятся такими, чтобы каждый входной вектор вырабатывал нужный выходной вектор. После достаточного числа повторений указанных операций для каждого вектора обучающего множества разность между действительными выходами и целевыми выходами достигает приемлемой величины, и говорят, что сеть обучилась.

По существу, такие алгоритмы аналогичны известным алгоритмам поиска глобального экстремума функции многих переменных. Однако с учетом специфики нейронных сетей для них разработаны многие специальные алгоритмы обучения.

Обучение без учителя представляет самонастраивающиеся стохастические ИНС, выполняющие процесс обучения «самостоятельно» на эвристических и метаэвристических принципах без явного привлечения обучающего множества. В настоящее время опубликовано достаточно много подобных алгоритмов. Интересным примером может служить так называемый генетический алгоритм [9], воплощающий представления о дарвиновской эволюции на основе генерации, тестирования и отбора наиболее жизнеспособных особей (ген — единица наследственной информации).

После окончания обучения сеть необходимо протестировать на каких-либо ранее не использованных данных, чтобы убедиться в надежности последующего использования по назначению (для аппроксимации сложной зависимости, оптимизации, распознавания изображений и т. д.).

Таким образом, нейронные сети не программируются в привычном смысле этого слова, а обучаются. Обученную сеть можно трактовать как практический механизм реализации нелинейной зависимости «вход-выход» любой сложности, в том числе в виде «черного ящика». В процессе обучения нейронная сеть способна выявлять сложные зависимости между входными и выходными данными, а также выполнять обобщение. Это значит, что в случае успешного обучения сеть сможет выдавать верный результат даже на основании данных, которые отсутствовали в обучающей выборке, а также неполных и/или «зашумленных», частично искаженных данных. Однако не следует надеяться, что некий искусственный интеллект сделает все за нас, успешное обучение ИНС зачастую оказывается очень трудоемким.

Примеры успешного решения задач геодезии с помощью ИНС

Преобразование координат

Моделирование систем геодезических координат (Geodetic Reference System, GRS) и их реализация (Geodetic Reference Frame, GRF) нередко приводит к тому, что картографический материал, составленный в разные временные промежутки, оказывается основанным на различных системах отсчета, что вызывает необходимость их соотнесения друг с другом. Процедура преобразования систем координат хорошо известна и доста-

точно просто выполняется по стандартным правилам. При этом в основу заранее кладется предположение о том, что известная семипараметрическая модель (по Гельмерту) описывает искомую функцию достаточно надежно. Однако реальная связь двух систем координат по разным причинам далеко не всегда соответствует указанной гипотезе и для ее надежного описания требуется, возможно, не 7 параметров, а 9 или 12 или ... Поэтому естественно трактовать искомое соотношение как «черный ящик» [10] и воспользоваться средствами ИНС, не требующими гипотетических моделей аппроксимации и позволяющими, как отмечалось выше, описать любую непрерывную зависимость с любой наперед заданной точностью.

Проделано большое количество экспериментов, в которых задачи о преобразовании систем координат (как пространственных, так и плоских) решаются с помощью ИНС, и результаты сравниваются с решениями тех же задач классическими методами, например, [11]. Сделан единодушный вывод о несомненном преимуществе ИНС.

Сравнение результатов моделирования измеренных значений трансформант геопотенциала средствами ИНС и EGM

В одной из работ выполнена экстраполяция измеренных значений модуля силы тяжести с помощью ИНС в виде многослойного персептрона с алгоритмом обратного распространения ошибки. Оптимальное количество промежуточных слоев подобрано эмпирически и оказалось равным 19. В 56 точках 8^0x12^0 территории США значения модуля силы тяжести g измерены непосредственно и вычислены по моделям гравитационного поля Земли EGM-2008 и EIGEN-6C4 до 2190-й степени. Из парных значений (измеренные и вычисленные по одной из моделей) в 32 точках составлены обучающие векторы и выполнено обучение ИНС. Полученная в результате модель значений силы тяжести протестирована в оставшихся 24 точках.

Сравнение полученных модельных значений и вычисленных по EGM-2008 (или с помощью EIGEN-6C4) с измеренными значениями показало, что точность g, полученных с помощью ИНС, оказывается более высокой по сравнению с результатами вычислений по каждой из упомянутых двух моделей гравитационного поля Земли. Заметим, что при использовании ИНС нет необходимости делать какие-либо предположения относительно частотного состава данных, а при появлении дополнительной информации полученную модель легко модифицировать.

Спутниковая альтиметрия

Известно, что в задачах обработки результатов спутниковой альтиметрии тщательный анализ формы отраженного сигнала (эхосигнала) позволяет не только получить нужное запаздывание относительно излученного импульса и, следовательно, вычислить высоту полета спутникового альтиметра над уровнем моря, но и достаточно надежно оценить значимую высоту волн в изучаемом районе, отклонение оси антенны от местной вертикали и другие нужные параметры. В литературе можно найти множество различных вариантов, решающих эти задачи с тем или иным успехом, но в любом случае важное значение имеет используемая модель определения параметров отраженного сигнала. Наиболее широко используемая модель Брауна — Хейне определяется четырьмя параметрами, значения которых находят на основе измерений с использованием тех или иных методов нелинейной оптимизации. В работе [12] показано, что рассматриваемая задача может быть успешно решена с помощью генетического алгоритма и ему подобных алгоритмов. При этом для определения искомых четырех параметров достаточно указать только функцию цели и границы (LB и UB) возможных изменений искомых параметров, а подбирать начальные значения параметров не требуется. Сделан вывод, что использование генетического алгоритма для определения параметров отраженного сигнала альтиметрии упрощает традиционную процедуру обработки.

Преобразование высот

Показательный эксперимент с преобразованием геодезических высот в ортометрические выполнен на территории Турции. Исходными данными послужили размещенные на территории страны 190 станций, на которых измерены и ортометрические высоты H (традиционным нивелированием), и геодезические высоты h (с помощью приемников ГНСС). Полученные точечные значения высот геоида N = h – H аппроксимированы непрерывной поверхностью, пользуясь для этого различными математическими средствами (полиномиальная интерполяция, сплайны, среднеквадратическая коллокация, искусственные нейросети) и различным количеством k исходных значений высот геоида N (k = 20, 40, 60, 80, 100, 120). Остальные (190 – k) значений высот геоида используются для контроля вычислений. Сравнение результатов аппроксимации с соответствующими контрольными значениями убедительно показало, что наилучшая аппроксимация достигается с помощью ИНС (среднеквадратическое отклонение составило от 6 см для k = 20 до 4 см для k = 120). Другие подобные примеры приведены в работе [13].

Решение краевых задач физической геодезии в локальном районе

В работах [14, 15] предложено искать приближенные решения краевых задач физической геодезии в локальном районе в виде глубокой ИНС. В отличие от традиционно используемого для этих целей потенциала простого (или двойного) слоя, глубокая ИНС располагает большим количеством свободных параметров и уникальной способностью обучаться на реальных данных. В качестве исходных данных может быть использована любая доступная в исследуемом районе гравиметрическая информация. Подобные идеи широко используются в настоящее время при решении различных дифференциальных уравнений в частных производных (например, [16]).

Моделирование нормального значения силы тяжести

С целью исследования возможностей искусственного интеллекта в области геодезии проанализированы 6 различных вариантов машинного обучения для моделирования нормального значения силы тяжести в 424 разных точках земной поверхности [17]. Один из вариантов представлял собой ИНС на основе радиальных базисных функций с тремя входами (геодезические координаты точки) и одним выходом (значение нормальной силы тяжести). Для обучения (297 точек) и тестирования (127 точек) результатов выходные значения были предварительно вычислены по известной формуле Сомильяна-Пицетти. Оптимальное количество нейронов в промежуточном слое оказалось равным 50. Именно такая ИНС показала наилучшую точность и устойчивость прогноза. Сделан вывод о высокой перспективности методов искусственного интеллекта при моделировании гравитационного поля Земли.

Оценка вектора скорости смещения пунктов

В [18] показана целесообразность использования ИНС для оценки скоростей изменения пространственных положений геодезических пунктов в связи с движением литосферных плит. По результатам испытаний в пяти геодезических сетях среди выбранных ИНС предпочтение отдается многослойному персептрону обратного распространения, точность которого в трех сетях превысила точность, полученную методом кригинга. Особо отмечается способность ИНС без особых затрат «доучиваться» в случае выявления новых данных, чего нельзя сказать о методе кригинга, требующем в таком случае повторного переопределения всех весов.

Аппроксимация орбит спутников глобальных навигационных спутниковых систем

В нескольких работах продемонстрирована эффективность использования ИНС различных конструкций для аппроксимации и прогнозирования орбит спутников. Так, в работе [19] показано успешное использование методов глубокого обучения для улучшения прогнозирования ультрабыстрых эфемерид. С помощью нейросетей с долгой краткосрочной памятью (Long Short-Term Memory, LSTM) улучшение в определении местоположения спутника достигает в среднем 47% на 24-часовом интервале. В работе [20] при вычислении координат спутников по бортовым и эфемеридным данным показано преимущество радиально-базисной ИНС по сравнению с традиционными методами полиномиальной и тригонометрической интерполяции. Подробности о моделировании ситуации, когда космический аппарат управляет своим орбитальным движением с помощью ИНС, можно найти в пособии [21].

Прикладная геодезия

Отдельный интерес представляет использование ИНС в задачах прикладной геодезии [22]. Набирает популярность использования ИНС для анализа и прогнозирования деформаций сооружений.

Описано успешное использование радиально-базисной ИНС для моделирования векторов смещений и деформации разнообразных конструкций, например, резервуара для хранения сжиженного природного газа. Сделаны выводы об эффективности таких ИНС, позволяющих проверять гипотезу о характере возникновения деформаций и судить о последствиях выявленных деформаций.

Исследовались возможности прогнозирования вертикального перемещения конструкций с целью предотвращения потенциальных повреждений. Использован многослойный персептрон с алгоритмом обратного распространения. Сделан вывод о возможности использования обученной ИНС для прогнозирования вертикальных смещений с точностью порядка 0,5 мм.

Моделирование высот геоида в локальном районе (стандартный пример)

Пусть в определенном локальном районе D (например, в одноградусной трапеции) доступно определенное количество точек с известными геодезическими координатами B, L, h и ортометрической высотой H. Разности $\zeta = h - H$ можно считать измеренными значениями высот геоида ζ в точках с соответствующими координатами B, L. С помощью ИНС в виде персептрона с тремя слоями и обратным распространением ошибки аппроксимации (Back Propagation) можно построить непрерывную функцию вида

$$f(p) = \zeta,\ p(B, L) \subset D,$$

которая позволяет вычислять высоты геоида в произвольной

точке p исследуемой области D, отражая при этом высокочастотную структуру глобального гравитационного поля Земли, недоступную известным глобальным моделям типа EGM-2008.

Совершенно аналогично, по существу, формулируется и решается задача о моделировании силы тяжести в локальном районе.

Многочисленные реальные эксперименты с различными размерами исследуемой области D и различным количеством исходных данных показали преимущество решения с помощью ИНС по сравнению с известными средствами интерполяции и экстраполяции.

В заключение подчеркнем, что в настоящее время теория и практика ИНС интенсивно развивается и совершенствуется. Например, совсем недавно появились нейросети совершенно новой архитектуры — Колмогорова-Арнольда нейросети (KAN), которые обещают превзойти все существующие разработки. Но суть дела не меняется — нейронные сети не программируются в привычном смысле этого слова, а обучаются. В этом, разумеется, нет ничего сверхъестественного. По существу, речь идет о многопараметрической задаче нелинейной оптимизации функции цели, количественно описывающей уровень пригодности функционирования ИНС. Возможность обучения — одно из главных преимуществ нейронных сетей перед традиционными алгоритмами. Поэтому использование ИНС в геодезии позволяет существенно обогатить как разнообразные методы обработки и уравнивания измерений, так и наиболее сложные вопросы геодезической теории.

Список литературы

1. Hagan M.T., Demuth H.B. Neural Network Design, 2nd Edition, eBook. — https://hagan.okstate.edu/nnd.html.

2. Каллан Р. Основные концепции нейронных сетей. Пер. с англ. под ред. А.Г. Сивака. — М.: Издат. дом «Вильямс», 2001. — 287 с.

3. Николенко С., Кадурин А., Архангельская Е. Н63 Глубокое обучение. — СПб.: Питер, 2018. — 480 с.

4. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 2. — С. 179–182.

5. Арнольд В.И. О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. — 1957 — Т. 114, № 4. — С. 679–681.

6. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 114, № 5. — С. 953–956.

7. Cybenko G. Approximation by superposition of a sigmoidal function. Mathematics of Control, Signals, and Systems. — 1989. — Vol. 2. — P. 303–314.

8. Hornik K. Stinchcombe M., White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators Neural Networks. — 1989. — Vol. 2. — P. 359–366.

9. Бураков М.В. Генетический алгоритм: Теория и практика. — СПб.: ГУАП, 2008.

10. Нейман Ю.М., Сугаипова Л.С. Строгие методы преобразования систем координат // Геодезия и картография. — 2022. — № 9. — С. 21–29.

11. Yao Yevenyo Ziggah, Hu Youjian, Alfonso Rodrigo Tierra, Prosper Basommi Laari. Coordinate Transformation between Global and Local Data Based on Artificial Neural Network with K-Fold Cross-Validation in Ghana // Earth Sciences Research Journal. — April 2019. — 23(1): 67–77.

12. Нейман Ю.М., Сугаипова Л.С. Об определении параметров отраженного сигнала альтиметрии // Геодезия и картография. — 2019. — № 12. — С. 10–19.

13. Yilmaz M., Turgut B., Gullu M., Yilmaz I. Application of artificial neural networks to height transformation // Tehnicki vjesnik — Technical Gazette. — April 2017. — 24(2): 443–448.

14. Нейман Ю.М., Сугаипова Л.С. Решение дифференциального уравнения Лапласа в виде глубокой нейросети как единый алгоритм приближенного решения задач физической геодезии в локальном районе // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». — 2023. — Т. 67. — № 1. — С. 18–25.

15. Нейман Ю.М., Сугаипова Л.С., Конешов В.Н., Непоклонов В.Б. О решении краевых задач физической геодезии в виде глубоких нейросетей // Геофизические исследования. — 2024. — Т. 25. — № 2. — С. 5–19.

16. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. — 2019. — Vol. 378. — P. 686–707.

17. Kumi-Boateng B., Ziggah Y.Y. Toward the Fourth Industrial Revolution: Testing the Capability of Machine Learning in Predicting Normal Gravity. — https://www.researchgate.net/publication/343050610.

18. Yilmaz M., Gullu M. A comparative study for the estimation of geodetic point velocity by artificial neural networks // Journal of Earth System Science. — 2014. — Vol. 123. — P. 791–808.

19. Gou J., Rösch C., Shehaj E., Chen K., Shahvandi M. K., Soja B., Rothacher M. Modeling the Differences between Ultra-Rapid and Final Orbit Products of GPS Satellites Using Machine-Learning Approaches // Remote Sensing. — November 2023. — 15(23): 5585.

20. Нейман Ю.М., Сугаипова Л.С. Аппроксимация орбит спутников ГНСС с помощью искусственных нейронных сетей // Геодезия и картография. — 2024. — № 5. — С. 11–23.

21. Сорокин А.В., Широбоков М.Г. Коррекция и прогнозирование орбитального движения космических аппаратов с помощью искусственных нейронных сетей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2018. — № 198. — 28 с.

22. Alexander Reiterer, Uwe Egly (editors). First International Workshop on Application of Artificial Intelligence in Engineering Geodesy, Vienna (Austria), 2008.