ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОЧНОСТИ КООРДИНАТ ТОЧЕК МЕСТНОСТИ — CE И LE

П.С. Титаров (Фирма «Ракурс»)

В 1998 г. окончил факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института по специальности «прикладные математика и физика», в 2004 г. — заочный факультет МИИГАиК по специальности «аэрофотогеодезия». С 1998 г. по настоящее время — инженер-программист отдела разработки ЗАО «Фирма «Ракурс».

В некоторых странах принято точность планового положения точек местности задавать показателем, обозначаемым CE (Circular Error), а точность высот — величиной, обозначаемой LE (Linear Error). Иногда приходится сталкиваться с неверной трактовкой численных значений этих характеристик, когда эти величины приписывают средним квадратическим ошибкам (СКО), которые также широко используются в качестве показателя точности координат точек местности. В данной статье приводится описание этих характеристик и дается вывод формул, связывающих CE и LE с СКО.

Показатель точности планового положения точек местности CE

CE — это величина, которую с заданной вероятностью (обычно, 90% — CE90 либо 95% — CE95) не превзойдет отклонение в плане (в плоскости XY) оцениваемой точки от ее истинного положения. Иначе говоря, с заданной вероятностью оцениваемая точка окажется в круге радиусом CE, центр которого совпадает с ее истинным положением.

Рассмотрим соотношение, связывающее показатель CE с СКО плановых координат X и Y. Будем полагать, что источники систематических ошибок устранены, а случайные ошибки ΔX и ΔY плановых координат независимы, нормально распределены и их дисперсии одинаковы и равны σ^2. Таким образом, математические ожидания $m_{\Delta X} = m_{\Delta Y} = 0$, дисперсии $\sigma^2_{\Delta X} = \sigma^2_{\Delta Y} = \sigma^2$, средние квадратические отклонения $\sigma_{\Delta X} = \sigma_{\Delta Y} = \sigma$. В этом случае плотность распределения случайных ошибок плановых координат имеет вид:

$$f(\Delta X, \Delta Y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2}{2\sigma^2}}.$$

Найдем вероятность того, что плановое отклонение $\Delta R = (\Delta X^2 + \Delta Y^2)^{0,5}$ не превзойдет заданной величины R:

$$P(\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \le R) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_{C_R} e^{-\frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2}{2\sigma^2}} d(\Delta X) d(\Delta Y).$$

В последней формуле область интегрирования C_R представляет собой круг радиусом R с центром в начале отсчета. Перейдем к полярным координатам r и θ: $\Delta X = r\cos\theta$, $\Delta Y = r\sin\theta$. Якобиан перехода к полярным координатам равен r (см., например, [1]). Выражение для искомой вероятности в полярных координатах принимает вид:

$$P(r \le R) = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}.$$

Преобразуя полученную формулу, получим:

$$R = \sigma\sqrt{2\ln\frac{1}{1 - P(r \le R)}}.$$

Подставляя значение $P(r \le R) = 0,9$, получим $CE90 = \sigma(2\ln 10)^{0,5}$, откуда $CE90 \approx 2,1460\sigma$.

Рассмотрим в качестве примера утверждение компании DigitalGlobe, поставляющей снимки, полученные с космического аппарата (КА) QuickBird [2], что при использовании высокоточных моделей рельефа и опорных точек для ортотрансформирования изображения уровня обработки Basic точность выходного ортоизображения составляет 2 м (при разрешении космического снимка, полученного при съемке в надир, 61 см). Следует иметь в виду, что под точностью, в данном случае, подразумевается именно величина CE90; СКО планового положения составит примерно 0,9 м.

Широкое использование показателя CE90 в американской геодезической литературе (в том числе и в описаниях данных дистанционного зондирования из космоса, получаемых с КА IKONOS [3], QuickBird [2, 4] и OrbView-3 [5]) обусловлено тем, что в США более полувека применялся стандарт NMAS (National Map Accuracy Standards) [6]. Его требования к плановой точности крупномасш-

табных карт могут быть сформулированы с помощью оценки CE90 в том случае, когда дисперсии погрешностей по обеим осям одинаковы (или близки). Если же это не так, и дисперсия погрешностей по разным осям существенно различается, вместо «круговой ошибки» необходимо использовать «эллиптическую». Детально этот вопрос рассмотрен в работе [7]. Заметим также, что выражение для «круговой ошибки» в [7] получено как частный случай «эллиптической» (отказ от рассмотрения случая, когда дисперсии погрешностей по разным осям неодинаковы, делает вышеприведенный вывод значительно проще).

В настоящее время показатель CE90 постепенно вытесняется оценкой CE95. Аналогично тому, как это было проделано выше для CE90, легко получить следующее соотношение $CE95 \approx 2{,}4477\sigma$.

В частности, показатель CE95 используется в современном стандарте США, определяющем точность пространственных данных [8].

Показатель точности высот точек местности LE

LE — это величина, которую с заданной вероятностью (обычно, 90% — LE90 либо 95% — LE95) не превзойдет отклонение по высоте оцениваемой точки от ее истинного значения.

Конечно, говоря о LE как об оценке точности высот, имеют в виду ее основное применение в геодезии и смежных науках. В общем случае этот показатель может использоваться для любых одномерных случайных величин так же, как показатель CE — для любых двумерных.

Получим соотношение, связывающее показатель точности LE и СКО высоты Z. Будем полагать, что источники систематических ошибок устранены, а случайные ошибки высот распределены нормально. Таким образом, математическое ожидание высотной ошибки равно нулю, а величину дисперсии обозначим $\sigma^2_{\Delta Z}$.

В общем случае функция распределения F(x) случайной величины X, нормально распределенной с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, может быть выражена через нормальную функцию распределения $\Phi^*(t)$ [9] следующим образом:

$F(x) = \Phi^*((x - m)/\sigma)$, где

$$\Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\tilde{t}^2}{2}} d\tilde{t}.$$

Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi^*((\beta - m)/\sigma) - \Phi^*((\alpha - m)/\sigma).$$

В нашем случае вероятность того, что величина высотной ошибки ΔZ не превзойдет по абсолютной величине заданного значения γ, равна:

$$P(|\Delta Z| < \gamma) = P(-\gamma < \Delta Z < \gamma) = \Phi^*(\gamma/\sigma_{\Delta Z}) - \Phi^*(-\gamma/\sigma_{\Delta Z}).$$

Принимая во внимание, что $\Phi^*(-t) = 1 - \Phi^*(t)$, полученное выражение можно привести к виду:

$$P(|\Delta Z| < \gamma) = 2\Phi^*(\gamma/\sigma_{\Delta Z}) - 1.$$

Преобразуем эту формулу:

$$\gamma = \sigma_{\Delta Z}\Phi^{*-1}((1 + P(|\Delta Z| < \gamma))/2).$$

Используя полученное выражение, определим соотношение между показателем точности LE90 и средней квадратической ошибкой $\sigma_{\Delta Z}$:

$$LE90 = \sigma_{\Delta Z}\Phi^{*-1}((1 + 0{,}9)/2) = \sigma_{\Delta Z}\Phi^{*-1}(0{,}95).$$

Функция $\Phi^*(t)$ табулирована во многих учебниках по теории вероятностей и справочниках. Интерполируя значения из таблиц, приведенных в приложении 1 учебника [9], получим $LE90 = 1{,}645\sigma_{\Delta Z}$.

Показатель LE90 своей распространенностью также обязан стандарту NMAS [6]. Современный американский стандарт [8] использует показатель LE95, для которого аналогично LE90 получаем:

$$LE95 = \sigma_{\Delta Z}\Phi^{*-1}((1 + 0{,}95)/2) = \sigma_{\Delta Z}\Phi^{*-1}(0{,}975).$$

Выбрав из приложения 1 учебника [9] значение $\Phi^{*-1}(0{,}975) = 1{,}96$, имеем:

$LE95 = 1{,}96\sigma_{\Delta Z}$.

Таким же образом можно получить соотношение между СКО и LE для любого заданного значения вероятности.

Список литературы

1. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. — М.: Изд-во МФТИ, 1997. — 720 с.

2. QuickBird Imagery Products. Frequently Asked Questions. Release Date: 14 March 2003. Digital Globe, Inc.

3. IKONOS Imagery Products and Product Guide. Space Imaging LLC, 2002.

4. QuickBird Imagery Products. Product Guide. Revision: 3.5. Release Date: 14 March 2003. Digital Globe, Inc.

5. OrbView-3 Commercial Satellite Imagery Product Catalog. Rev. 5/17/04. ORBIMAGE Inc., 2004.

6. United States National Map Accuracy Standards: U.S. Bureau of the Budget, 1947, Washington, D.C.

7. Error Theory as Applied to Mapping, Charting and Geodesy. —United States Defense Mapping Agency Technical Report 8400.1. — 2 May 1991.

8. Geospatial Positioning Accuracy Standards (FGDC-STD-007.3-1998). Part 3: National Standard for Spatial Data Accuracy. — Subcommittee for Base Cartographic Data, United States Federal Geographic Data Committee, Washington, D.C.

9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. — 6-е изд. Стер. — М.: Высшая школа, 1999. — 576 с.: ил.

RESUME

Description of the following precision factors is given: CE (Circular Error) — survey point planimetric position and LE (Linear Error) — survey point height. The formulae are derived relating these factors with the RMS of the point planimetric and height positions used in geodetic practice.